

## Процессы

1. На острове живут красные и зеленые хамелеоны. Некоторые из них дружат (дружбы взаимны). Каждый день один из хамелеонов может изменить свой цвет (с красного на зеленый или с зеленого на красный), если среди его друзей большинство хамелеонов другого цвета. Докажите, что переокраски хамелеонов не могут продолжаться бесконечно.
2. На столе в ряд лежат  $N$  монет. За один ход можно перевернуть несколько (возможно одну) монет, лежащих подряд. Какого наименьшего количества ходов заведомо хватит для того, чтобы все монеты перевернуть орлом вверх?
3. На плоскости отмечено 2021 точка общего положения (никакие три точки не лежат на одной прямой). Все точки разбиты на пары, точки из каждой пары соединены отрезком. Если два отрезка  $AB$  и  $XY$  пересекаются, то их заменяют на пару отрезков  $AX$  и  $BY$ . Докажите, что эту операцию невозможно повторять бесконечное число раз.
4. (а) На съезд партии приехали 100 депутатов. Известно, что у каждого депутата не более 49 недругов среди присутствующих на съезде. Докажите, что руководитель партии сможет рассадить депутатов за круглый стол так, чтобы никакие два недруга не сидели рядом.  
(б)  $\Gamma$  — граф, состоящий из  $n \geq 3$  вершин. Про любые две несмежные вершины  $v$  и  $u$  известно, что  $\deg v + \deg u \geq n$ . Докажите, что в графе существует простой цикл длины  $n$ .
5. Степень каждой вершины графа не превосходит 11. Докажите, что все вершины этого графа можно раскрасить в четыре цвета так, что количество отрезков с одноцветными концами будет не более, чем количество вершин.
6. На доске написана последовательность букв А и Б. За один ход разрешается заменить последовательность букв АБ на последовательность букв БАААА. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?
7. По окружности расставлены  $2n$  красных и  $2n$  синих точек, причем красные и синие точки чередуются. Красные точки разбиты на пары, и точки в каждой паре соединены красным отрезком. Аналогично проводятся синие отрезки. Докажите, что имеется не менее  $n$  пар пересекающихся разноцветных отрезков.