

Клетчатая комбинаторика

1. Можно ли расставить на шахматной доске 25 фишек так, чтобы каждая из них граничила (по стороне или углу) с нечётным количеством фишек?
2. На шахматной доске 7×8 в двух противоположных углах стоят ладьи, а остальных клетках стоят пешки. Двое по очереди двигают ладьи (каждый свою), причем за каждый ход ладья должна срубить либо пешку, либо ладью соперника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
3. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трёх клеток так, что каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекало одно и то же количество уголков?
4. Расстоянием между двумя клетками бесконечной шахматной доски назовем минимальное число ходов в пути короля между этими клетками. На доске отмечены три клетки, попарные расстояния между которыми равны 100. Сколько существует клеток, расстояния от которых до всех трех отмеченных равны 50?
5. В квадрате 2021×2021 закрасили главную диагональ, а также все клетки под ней. Сколько существует способов разрезать по линиям сетки закрашенную часть квадрата на 2021 различных прямоугольников?
6. Клетки шахматной доски 8×8 раскрашены в белый и черный цвета таким образом, что в каждом квадрате 2×2 половина клеток черные и половина белые. Сколько существует таких раскрасок?
7. Клетчатая доска $2m \times 2n$ раскрашена в шахматную раскраску. Сколькими способами можно поставить на белые клетки такой доски mn фишек так, чтобы в одной клетке стояло не более одной фишки и никакие две фишки не стояли в соседних по диагонали клетках?
8. Из клетчатого квадрата 55×55 вырезали по границам клеток 400 трёхклеточных уголков (повёрнутых как угодно) и ещё **(а)** 550 клеток; **(б)** 525 клеток; **(с)** 500 клеток. Докажите, что какие-то две вырезанные фигуры имеют общий отрезок границы.