Поворотная гомотетия

Определение. Поворотной гомотетией с коэффициентом k и углом φ ($k > 0, 0 \leqslant \varphi < 2\pi$) называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на угол φ, имеющих общий центр.

1. **(a)** Выразите функцию $f(z), z \in \mathbb{C}$, задающую поворотную гомотетию комплексной плоскости относительно точки a с коэффициентом k и углом φ.
(b) Докажите, что композицию двух поворотных гомотетий — это поворотная гомотетия.

2. **(a)** Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке P, причем все точки A, B, A_1, B_1, P различны. Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая точку A в A_1, а B в B_1, причем её центром является точка пересечения описанных окружностей треугольников AA_1P и BB_1P.
(b) Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1.
(c) **(Точка Микеля)** Из предыдущих пунктов выведите, что если даны четыре прямые общего положения, тогда описанные окружности четырех треугольников, образованных этими прямыми, пересекаются в одной точке.

3. Боковые стороны AD и BC трапеции $ABCD$ повернуты около своих середин на угол $90°$ против часовой стрелки, после чего они занимают положение A_1D_1 и B_1C_1. Докажите, что $A_1B_1 = C_1D_1$.

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Описаная окружности треугольника BCD вторично пересекает окружности, проходящую через точки A и D и касающуюся прямой CD, в точке K. Точка M — середина BC, N — середина AD. Докажите, что точки B, M, N и K лежат на одной окружности.

5. Точки M и N лежат на сторонах AB и BC квадрата $ABCD$, причем $MB = BN$. H — основание высоты, опущенной из точки B на отрезок MC. Докажите, что $\angle NHD = 90°$.

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1; точки M и M_1 — середины отрезков AC и A_1C_1 соответственно. Прямая BM пересекает описанную окружность треугольника A_1BC_1 в точке K_1, а прямая BM_1 — описанную окружность треугольника ABC в точке K. Сами описанные окружности пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и AC — в точке T. Докажите, что точки M, M_1, K, K_1, P и T лежат на одной окружности.

И ещё пара задач

7. Четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Прямая AB пересекается с CD в точке E, F — точка пересечения диагоналей. Описанные окружности треугольников AFD и BFC

пересекаются в точке H. Докажите, что $\angle EHF = 90°$.

8. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 2\angle B$. Пусть D — основание биссектрисы угла A. Окружность ω с центром в точке S касается внешним образом описанных окружностей треугольников ABD и ACD, а также касается прямой AB (ω и точка C лежат по одну сторону от AB). Докажите, что прямые AS и BC перпендикулярны.