

Последовательности

1. Последовательность определяется так: первые её члены — 1, 2, 3, 4, 5. Далее каждый следующий (начиная с 6-го) равен произведению всех предыдущих членов минус 1. Докажите, что сумма квадратов первых 70 членов последовательности равна их произведению.
2. С натуральным числом K производится следующая операция: оно представляется в виде произведения простых сомножителей $K = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_n$; затем вычисляется сумма $p_1 + p_2 + \dots + p_n + 1$. С полученным числом производится то же самое, и т.д. Доказать, что образующаяся последовательность, начиная с некоторого номера, будет периодической.
3. Можно ли расположить на прямой систему отрезков длины 1, не имеющих общих концов и общих точек так, чтобы любая бесконечная арифметическая прогрессия с любой разностью и любым начальным членом имела общую точку с некоторым отрезком системы?
4. Можно ли из последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ выбрать (сохраняя порядок)
 - (a) сто чисел,
 - (b) бесконечную подпоследовательность чисел, из которых каждое, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих ($a_k = a_{k-2} - a_{k-1}$)?
5. Числа 1, 2, 3, ..., 101 выписаны в ряд в каком-то порядке. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся 11 будут расположены по их величине (либо возрастаая, либо убывая).
6. Дана невозрастающая последовательность чисел

$$\frac{1}{2020} = a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots > 0,$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = 1.$$

Докажите, что найдутся 1010 чисел, из которых самое маленькое больше половины самого большого.

7. Последовательности a_n и b_n заданы условиями $a_1 = 1, b_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}$ и $b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$. Докажите, что $a_{2021} < 5$.