

## Последовательности

1. Имеется  $4n$  положительных чисел, таких, что из любых четырёх попарно различных можно составить геометрическую прогрессию. Доказать, что среди этих чисел найдется  $n$  одинаковых.
2. Последовательность  $x_n$  определяется условиями:

$$x_1 = 2020, x_2 = 2021, x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Докажите, что среди членов последовательности найдётся ноль. Найдите номер этого члена.

3. Последовательность определяется так: первые её члены — 1, 2, 3, 4, 5. Далее каждый следующий (начиная с 6-го) равен произведению всех предыдущих членов минус 1. Докажите, что сумма квадратов первых 70 членов последовательности равна их произведению.
4. С натуральным числом  $K$  производится следующая операция: оно представляется в виде произведения простых сомножителей  $K = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ ; затем вычисляется сумма  $p_1 + p_2 + \dots + p_n + 1$ . С полученным числом производится то же самое, и т.д. Доказать, что образующаяся последовательность, начиная с некоторого номера, будет периодической.
5. Последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  такова, что для каждого  $n$  уравнение  $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$  имеет действительный корень. Может ли число членов этой последовательности быть бесконечным?
6. Можно ли расположить на прямой систему отрезков длины 1, не имеющих общих концов и общих точек так, чтобы любая бесконечная арифметическая прогрессия с любой разностью и любым начальным членом имела общую точку с некоторым отрезком системы?
7. Можно ли из последовательности  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  выбрать (сохраняя порядок)  
(**a**) сто чисел, (**b**) бесконечную подпоследовательность чисел, из которых каждое, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих ( $a_k = a_{k-2} - a_{k-1}$ )?