Корни из единицы

Напоминание. *Формула Муавра*: $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Определение. Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w такое, что $w^n = z$, обозначается $\sqrt[n]{z} = w$.

1. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — корни n-ой степени из единицы.
(a) Докажите, что среди них можно выбрать корень α такой, что для любого α_i найдется целое число k такое, что $\alpha_i = \alpha^k$.
(b) Сколько существует таких корней?

2. Докажите, что $x^{66}+x^{55}+x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ делится на $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

3. Пусть $\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$. Вычислите:
(a) $\alpha_0\cdot\alpha_1\cdot\dots\cdot\alpha_{n-1}$;
(b) $\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}$.

4. Вычислите сумму k-х степеней корней n-й степени из 1, где k, n — натуральные числа, если
(a) НОД$(k,n)=1$;
(b) НОД$(k,n)\neq 1$.

5. **(a)** Пусть $\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$. Докажите, что

$$n = (1-\alpha)\cdot(1-\alpha^2)\cdot(1-\alpha^3)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha^{n-1}).$$

(b) Для каких других корней n-ой степени из единицы это тождество выполняется?
(c) Для нечетных n докажите, что

$$\sqrt{n} = \left|(1-\alpha)\cdot(1-\alpha^2)\cdot(1-\alpha^3)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha^{\frac{n-1}{2}})\right|.$$

(d) Выпишите аналогичное равенство для четного n.

6. Обозначим $S_n = 1+\alpha+\alpha^4+\alpha^9+\dots+\alpha^{(n-1)^2}$. Докажите, что:
(a) $|S_n| = \sqrt{n}$, если $n = 2k+1$, где $k\in\mathbb{N}$;
(b) $S_n = 0$, если $n = 4k+2$, где $k\in\mathbb{N}$;
(c) $|S_n| = \sqrt{2n}$, если $n = 4k$, где $k\in\mathbb{N}$;
(d) $S_p^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$, где p — нечетное простое.