Комплексные числа

Определение. *Комплексные числа* — это числа вида $z = x + iy$, где x и y — действительные, а i — *мнимая единица*, т.е. число, квадрат которого равен -1. Числа x, y называются соответственно *действительной* и *мнимой* частью. комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. *Сопряжённым* числом к $z = x + iy$ называют $\overline{z} = x - iy$. *Модулем* числа $z = x + iy$ называют число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

1. Докажите, что
(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$; $\overline{\overline{z}} = z$;
(b) $|z|^2 = z\overline{z}$; $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$; $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

2. Вычислите значение выражения:
(a) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;
(b) $(1 + i)^{4n}$, при всех натуральных n.

Тригонометрическая форма. Для любого комплексного числа $z \neq 0$ справедливо равенство $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, где $|z|$ и ϕ — соответственно модуль и аргумент числа z.

3. Докажите, что при умножении (делении) двух комплексных чисел их аргументы складываются (вычитаются), а модули перемножаются (делятся). Выведите отсюда *формулу Муавра*:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

4. Используя *формулу Муавра*, вычислите $\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n$, при всех целых n.

5. Вычислите суммы:
(a) $\cos\varphi + \cdots + \cos n\varphi$;
(b) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$;
(c) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$.

6. Комплексные числа a, b, c имеют модуль 1. Найдите $\left|\frac{a+b+c}{ab+bc+ac}\right|$.

7. Даны комплексные числа a, b, c. Докажите, что $\operatorname{Re}(a - c)(\overline{c} - \overline{b}) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $|c - \frac{a+b}{2}| \leqslant \frac{1}{2}|a - b|$.

8. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки комплексной плоскости в вершинах выпуклого n-угольника. Точка z такова, что

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \ldots + \frac{1}{z - z_n} = 0.$$

Докажите, что точка z лежит внутри этого n-угольника.

9. В трехмерном пространстве построили плоскость Oxy и куб так, что O является вершиной куба. Будем рассматривать ребра куба, выходящие из точки O, как векторы направленные от точки O. Ортогонально спроецируем три получившихся вектора на плоскость Oxy и сопоставим им комплексные числа (точке на плоскости с координатами (x, y) естественно сопоставляется комплексное число $z = x + iy$) a, b, c. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.