Комплексные числа

Определение. *Комплексные числа* — это числа вида $z = x + iy$, где x и y — действительные, а i — *мнимая единица*, т.е. число, квадрат которого равен -1. Числа x, y называются соответственно *действительной* и *мнимой* частью. комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. *Сопряжённым* числом к $z = x + iy$ называют $\overline{z} = x - iy$. *Модулем* числа $z = x + iy$ называют число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

1. Докажите, что
- **(a)** $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$; $\overline{\overline{z}} = z$;
- **(b)** $|z|^2 = z\overline{z}$; $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$; $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

2. Вычислите значение выражения:
- **(a)** $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;
- **(b)** $(1+i)^{4n}$, при всех натуральных n.

Тригонометрическая форма. Для любого комплексного числа $z \neq 0$ справедливо равенство $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, где $|z|$ и ϕ — соответственно модуль и аргумент числа z.

3. Докажите, что при умножении (делении) двух комплексных чисел их аргументы складываются (вычитаются), а модули перемножаются (делятся). Выведите отсюда *формулу Муавра*:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

4. Используя *формулу Муавра*, вычислите $\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n$, при всех целых n.

5. Решите уравнения:
- **(a)** $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$;
- **(b)** $z^3 - 1 = 0$.

6. Найдите все комплексные числа сопряженные своему
- **(a)** квадрату;
- **(b)** кубу.

7. Докажите равенство $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.

8. Вычислите суммы:
- **(a)** $\sin\varphi + \dots + \sin n\varphi$;
- **(b)** $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots$.

9. Комплексные числа a, b, c имеют модуль 1. Найдите $\left|\frac{a+b+c}{ab+bc+ac}\right|$.