

## Минимумы и максимумы

1. Дана прямая и две точки  $A$  и  $B$ , лежащие по одну сторону от этой прямой на равном расстоянии от неё. Как с помощью циркуля и линейки найти на прямой такую точку  $C$ , что произведение  $AC \cdot BC$  будет наименьшим?
2. Пусть внутри некоторого круга заданы две точки  $A$  и  $B$ . Для какой из точек  $C$ , расположенных на окружности, угол  $ACB$  принимает наибольшее значение?
3. Из точки  $X$  описанной окружности треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры  $XP$  и  $XQ$  на прямые  $AB$  и  $AC$ . При каком положении точки  $X$  длина отрезка  $PQ$  максимальна?
4. **Задача Фаньяно.** Впишите в данный остроугольный треугольник  $ABC$  треугольник наименьшего периметра.
5. Дан треугольник  $ABC$ . Найдите на прямой  $AB$  точку  $X$ , для которой сумма радиусов описанных окружностей треугольников  $ACX$  и  $BCX$  была бы наименьшей.
6. На сторонах  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  равностороннего треугольника  $ABC$ , сторона которого равна 2, выбрали точки  $C_1$ ,  $B_1$ ,  $A_1$  соответственно. Какое наибольшее значение может принимать сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C$ ?
7. Медианы треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . На прямой, проходящей через точку  $A$  параллельно  $BC$ , выбрана точка  $D$  так, что  $\angle CMD = 90^\circ$ . Площадь четырёхугольника  $AMCD$  равна  $S$ . Какое минимальное значение принимает произведение  $AB \cdot CD$ ?
8. Дан правильный треугольник  $ABC$  со стороной 3. На стороне  $AC$  выбрана точка  $P$  такая, что  $AP = 2$ . На сторонах  $BC$  и  $AB$  выбраны такие точки  $X$  и  $Y$  соответственно, что  $BX = BY + 1$  и сумма  $PX + PY$  минимальна. Чему она равна?