Теоремы Чевы и Менелая в синусной форме

Конструкция все та же: дан треугольник ABC и точки A_1, B_1, C_1 на сторонах BC, AC и AB соответственно.

Теорема Чевы в синусах. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle(AB, AA_1)}{\sin\angle(AA_1, AC)} \cdot \frac{\sin\angle(CA, CC_1)}{\sin\angle(CC_1, CB)} \cdot \frac{\sin\angle(BC, BB_1)}{\sin\angle(BB_1, BA)} = 1$$

Теорема Менелая в синусах. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle(AB, AA_1)}{\sin\angle(AA_1, AC)} \cdot \frac{\sin\angle(CA, CC_1)}{\sin\angle(CC_1, CB)} \cdot \frac{\sin\angle(BC, BB_1)}{\sin\angle(BB_1, BA)} = -1$$

1. **Основная теорема о симедиане.** Пусть касательные к описанное окружности треугольника ABC, проведенные в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle BAP = \angle MAC$, где M — середина стороны BC.

2. На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники BCA_1, CAB_1 и ABC_1. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB' и CC'. Пусть P – точка пересечения $A'B'$ и CC', а Q – точка пересечения $A'C'$ и BB'. Докажите, что $\angle PAC = \angle QAB$.

4. В окружность вписан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты BH_B и CH_C. Точки X и Y симметричны точкам H_B и H_C относительно середин сторон AC и AB соответственно. Докажите, что прямая AO делит отрезок XY пополам.

6. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точка M — середина BC. Докажите, что прямые B_1C_1, AM и IA_1 пересекаются в одной точке.

7. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC, X – произвольная точка. Окружность с диаметром XH вторично пересекает прямые AH, BH, CH в точках A_1, B_1, C_1, а прямые AX, BX, CX в точках A_2, B_2, C_2. Доказать, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

8. Смотрите на картинку.