Квадратичный закон взаимности. Задачи.

1. Пусть p — нечетное простое число вида $3k+2$. Докажите, что если $3a^2+b^2$ делится на p, то a и b делится на p.

2. Докажите, что при любом натуральном a все простые делители a^2-5a+5 большие 5 имеют вид $5k \pm 1$.

3. Про натуральные числа a, b, p, где p — простое, известно, что $a^2+b^2 = p$. Докажите, что a — квадратичный вычет по модулю p, если
   (a) a — нечётное простое;
   (b) a — нечётное.

4. Найдите наименьший простой делитель числа $12^{2^{15}}+1$.

5. Пусть $k = 2^{2^n}+1$ для некоторого натурального n. Докажите, что k является простым тогда и только тогда, когда k — делитель числа $3^{\frac{k-1}{2}}+1$.

6. Найдите все натуральные n такие, что $2^n-1 | 3^n-1$.

7. Натуральные числа a, b, c взаимно просты в совокупности, и выполняется $a^2-ab+b^2 = c^2$. Докажите, что все делители числа c имеют вид $6k+1$.

8. Найдите все простые p такие, что $p!+p$ — точный квадрат.

9. Пусть m, n — натуральные числа такие, что
$$A = \frac{(m+3)^n+1}{3m}$$
натуральное число. Докажите, что A — нечётное.