

Квадратичные вычеты. Задачи.

1. Докажите, что для любого простого p найдется натуральное x такое, что $x^8 - 16$ делится на p .
2. Докажите, что при натуральных $x, y > 2$ выражение $\frac{x^2+1}{y^2-5}$ не может принимать целые значения.
3. Последняя цифра числа x^2+xy+y^2 равна нулю. Докажите, что две последние цифры этого числа равны нулю.
4. (a) Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ не имеет решений в натуральных числах.
(b) Докажите, что оно имеет бесконечно много решений в целых числах.
5. Решите уравнение $x^2 = y^3 - 5$.
6. По кругу стоят p детей (p — простое число). Злой Дед Мороз обходит круг по часовой стрелке и раздаёт конфеты. Вначале он выдал первому ребёнку одну конфету, затем 1 ребёнка пропустил, следующему ребёнку выдал одну конфету, затем 2 детей пропустил, следующему ребёнку выдал одну конфету, затем 3 детей пропустил и так далее. Раздав $2021p$ конфет, он ушёл. Сколько детей так и не получили конфеты?