

## Тренировочная олимпиада

1. Квадрат со стороной 1 разрезан на 100 прямоугольников одинакового периметра  $p$ . Найдите максимальное возможное значение  $p$ .
2. Пусть  $f(x) = x^3 - x$ ,  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ . Докажите, что при любых действительных  $a$  и  $b$ , сумма которых не равна 0, многочлен  $af(x) + bg(x)$  имеет три различных действительных корня.
3. О вписанном четырехугольнике  $ABCD$  известно, что  $AB > CD$  и  $BC > AD$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  отмечены точки  $X$  и  $Y$  соответственно так, что  $AX = CD$  и  $AD = CY$ . Пусть  $M$  — середина  $XY$ . Докажите, что угол  $AMC$  прямой.
4. Существует ли 333-значный точный квадрат, средние три цифры которого в точности 333 (то есть слева и справа от группы «333» цифр поровну)?
5. В некотором графе степень каждой вершины не превосходит 1000. Докажите, что рёбра графа можно так покрасить в 10 цветов, что не найдется нечётного одноцветного цикла.