

Тренировочная олимпиада

1. Квадрат со стороной 1 разрезан на 100 прямоугольников одинакового периметра p . Найдите максимальное возможное значение p .
2. Пусть $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что при любых действительных a и b , сумма которых не равна 0, многочлен $af(x) + bg(x)$ имеет три различных действительных корня.
3. О вписанном четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB > CD$ и $BC > AD$. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y соответственно так, что $AX = CD$ и $AD = CY$. Пусть M — середина XY . Докажите, что угол AMC прямой.
4. Существует ли 333-значный точный квадрат, средние три цифры которого в точности 333 (то есть слева и справа от группы «333» цифр поровну)?
5. В некотором графе степень каждой вершины не превосходит 1000. Докажите, что рёбра графа можно так покрасить в 10 цветов, что не найдется нечётного одноцветного цикла.