Тренировочная олимпиада

1. Сколькими различными способами можно расставить в таблице 3×3 числа $1, 2, \ldots, 9$ таким образом, чтобы все суммы чисел по строкам и столбцам были нечётными?

2. Последовательность a_n определена условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}$ при $n \geqslant 1$. Найдите a_{2021}.

3. В стране 1000 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Докажите, что все авиалинии можно передать в собственность 10 авиакомпаниям так, чтобы ни у одной авиакомпании не было циклического маршрута по городам нечётной длины.

4. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть PQ — диаметр ω, перпендикулярный AC (точка P лежит внутри треугольника ACD, а точка Q — внутри ABC). Докажите, что прямые BP, DQ и AC пересекаются в одной точке.

5. Можно ли в единичные кубики клетчатого куба $4 \times 4 \times 4$ записать 64 попарно различных числа так, чтобы сумма чисел в любых 4 кубиках, центры которых лежат на одной прямой, была одной и той же?