Готовимся к региону. Геометрия.

1. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB, I — центр вписанной окружности. Пусть P — точка на описанной окружности треугольника AIB. Прямые, проходящие через точку P параллельно CA и CB, пересекают AB в точках D и E соответственно. Прямая, проходящая через точку P параллельно AB пересекает CA и CB в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DF и EG пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

2. Пусть ABC — остроугольный треугольник, $AB, AC > BC$, O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — ортоцентр. Описанная окружность треугольника AHC пересекает отрезок AB в точке M, описанная окружность треугольника AHB пересекает отрезок AC в точке N. Докажите, что центр описанной окружности MNH лежит на OH.

3. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает окружность, описанную около треугольника AIC, в точках D и E. Точка F на отрезке B_1X выбрана так, что $AB_1 = CF$. Докажите, что точки B, D, E и F лежат на одной окружности.

4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, а точка P лежит на стороне AB. Диагональ AC пересекает отрезок DP в точке Q. Прямая, проходящая через P параллельно CD, пересекает продолжение стороны CB за точку B в точке K, а прямая, проходящая через Q параллельно BD, пересекает продолжение стороны CB за точку B в точке L. Докажите, что описанные окружности треугольников BKP и CLQ касаются.

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$, в которой AB параллельно CD. Пусть E — середина AC. Обозначим через Γ и Ω описанные окружности треугольников ABE и CDE соответственно. Касательная к Γ, проведённая в точке A, и касательная к Ω, проведённая в точке D, пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PE касается Ω.

6. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром в точке O_b проходит через точки A, C_1 и середину отрезка BH. Окружность с центром в точке O_c проходит через точки A, B_1 и середину отрезка CH. Докажите, что $B_1O_b + C_1O_c > \dfrac{BC}{4}$.

7. Пусть ABC — остроугольный треугольник, $AB > AC$, Γ — его описанная окружность, H — ортоцентр, F — основание высоты из точки A, M — середина BC. Точка Q выбрана на окружности Γ так, что $\angle HQA = 90°$, а точка K выбрана на Γ так, что $\angle HKQ = 90°$. Предположим, что все точки A, B, C, K и Q различны и лежат на Γ в таком порядке. Докажите, что описанные окружности треугольников KQH и FKM касаются.