Готовимся к региону. Геометрия.

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D, прямая, проходящая через точку D, пересекает отрезок AB и продолжение стороны AC в точках X и Y соответственно. Окружность, описанная около XBD пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точке Z, отличной от B. Прямые ZD и ZY пересекают ω в точках V и W. Докажите, что $VW = AB$.

2. Пусть ABC — остроугольный треугольник с углом $\angle BAC = 60°$, $AB > BC$, I — центр вписанной окружности, H — ортоцентр. Докажите, что $2\angle AHI = 3\angle ABC$.

3. Диагональ BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой угла B. Отрезки AD и CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q соответственно. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC, пересекает лучи AB и BC в точках R и S соответственно. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

4. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB, I — центр вписанной окружности. Пусть P — точка на описанной окружности треугольника AIB. Прямые, проходящие через точку P параллельно CA и CB, пересекают AB в точках D и E соответственно. Прямая, проходящая через точку P параллельно AB пересекает CA и CB в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DF и EG пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

5. Пусть ABC — остроугольный треугольник, $AB, AC > BC$, O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — ортоцентр. Описанная окружность треугольника AHC пересекает отрезок AB в точке M, описанная окружность треугольника AHB пересекает отрезок AC в точке N. Докажите, что центр описанной окружности MNH лежит на OH.

6. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает окружность, описанную около треугольника AIC, в точках D и E. Точка F на отрезке B_1X выбрана так, что $AB_1 = CF$. Докажите, что точки B, D, E и F лежат на одной окружности.

7. Пусть M — точка внутри треугольника ABC. Докажите, что

$$\min(MA, MB, MC) + MA + MB + MC < AB + AC + BC.$$