

Готовимся к региону. Комбинаторика.

1. В компании 100 человек. Оказалось, что любых 98 из них можно разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?
2. На окружности отмечено 150 серых, 151 бурая и 152 малиновых точки таким образом, что никакие две одноцветные точки не стоят рядом. Докажите, что найдётся бурая точка, у которой оба соседа — малиновые.
3. На экзамен пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задаёт каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получают оценку «сдал» к концу экзамена?». В ответ студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: «сдал» или «не сдал».

После того, как все студенты получают оценку, придет инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку «не сдал». Если хотя бы один такой студент найдётся, то преподаватель будет отстранен от работы, а оценки всех студентов заменят на «сдал». В противном случае никаких изменений не произойдёт.

(a) Придумайте стратегию, которая гарантирует всем студентам оценку «сдал».

(b) Докажите, что эта стратегия единственная.

4. В стране между некоторыми парами городов осуществляются двусторонние беспосадочные авиарейсы. Известно, что из любого города в любой другой можно долететь, совершив не более 100 перелетов. Кроме того, из любого города в любой другой можно долететь, совершив четное число перелетов. При каком наименьшем натуральном d из любого города можно гарантированно долететь в любой другой, совершив четное число перелетов, не превосходящее d ?
5. В пустой таблице 2^{100} строк и 100 столбцов. Алиса и Ева по очереди заполняют пустые клетки первой строки таблицы; Алиса ходит первой. Каждым ходом Алиса выбирает пустую клетку и ставит в неё крестик, а Ева каждым ходом выбирает пустую клетку и ставит нолик. После того, как в первой строке не остаётся пустых клеток, игроки переходят ко второй строке, и так далее (в каждой новой строке Алиса ходит первой).

Игра заканчивается, когда все строки заполнятся. Алиса хочет, чтобы различных строк в таблице было как можно больше, а Ева — как можно меньше. Сколько различных строк будет в таблице, если обе будут действовать наилучшим для себя образом?

6. Стол имеет форму правильного 1000-угольника со стороной 1. В одной из вершин этого 1000-угольника сидит жук. Все 1000 вершин нумеруются в некотором порядке числами $1, 2, \dots, 1000$ так, что жук изначально находится в вершине с номером 1. Жук может ползти только по краю стола и только по часовой стрелке. Он начинает ползти из вершины номер 1 и ползет без остановки, пока не достигнет вершины 2, в которой делает остановку. Далее он продолжает путь по часовой стрелке из вершины 2, пока не достигнет вершины 3, в которой делает остановку, и т. д. Жук заканчивает свой путь в вершине номер 1000. Найдите количество нумераций вершин, для которых длина пути жука равняется 2017.