Готовимся к региону. Теория чисел.

1. Существуют ли 2020 натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию таких, что каждое имеет вид a^b, где a, b — натуральные и $b > 1$?

2. Для каждого натурального n обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2, S_2 = 2 + 3, S_3 = 2 + 3 + 5, \ldots$. Могут ли два подряд идущих члена последовательности S_n оказаться квадратами натуральных чисел?

3. Последовательность натуральных чисел a_n задана первым членом a_1 и правилом $a_{n+1} = a_n/2$, если a_n — чётное, $a_{n+1} = 3a_n + 1$, если a_n — нечётное. Докажите, что в этой последовательности встретится число, делящееся на 4.

4. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$?

5. Существуют ли 100 чисел таких, что НОД любых двух из них равен их разности?

6. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ — некоторая перестановка чисел от 1 до 100. Рассмотрим числа

$$x_1$$

$$x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3$$

$$\ldots$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}.$$

Какое наибольшее количество точных квадратов могло среди них оказаться?

7. Вычислите максимальное значение выражения $m^2 + n^2$, где m, n — натуральные числа, удовлетворяющие следующим условиям

$$1 \leqslant m, n \leqslant 2021;$$

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1.$$