Готовимся к региону. Теория чисел.

1. В произведении трёх натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно на 2016?

2. Целые числа $a, x_1, x_2, \ldots, x_{13}$ таковы, что

$$a = (1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_{13}).$$

Докажите, что $ax_1x_2\ldots x_{13} = 0$.

3. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_l$, где $1 \leqslant k, l \leqslant 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02,..., 99)?

4. Изначально на доске записаны числа m и n. Каждую минуту Саша записывает в тетрадку квадрат наименьшего из чисел на доске, после чего Даша ищет разность чисел на доске и записывает ее вместо наибольшего из них, пока в какой-то момент не выпишет 0. Чему равна сумма чисел у Саши в тетради?

5. Для каждого натурального n обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2, S_2 = 2 + 3, S_3 = 2 + 3 + 5, \ldots$. Могут ли два подряд идущих члена последовательности S_n оказаться квадратами натуральных чисел?

6. Последовательность натуральных чисел a_n задана первым членом a_1 и правилом $a_{n+1} = a_n/2$, если a_n — чётное, $a_{n+1} = 3a_n + 1$, если a_n — нечётное. Докажите, что в этой последовательности встретится число, делящееся на 4.

7. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$?