

## Тренировочная олимпиада

1. В футбольном турнире участвовала 2021 команда (каждая сыграла с каждой из остальных по одному матчу). Могло ли в результате оказаться так, что каждая из команд участниц выиграла столько же матчей, сколько сыграла вничью?
2. На плоскости отмечены 2020 красных точек и 2021 синяя точка так, что никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой. Найдите наименьшее натуральное  $k$ , при котором для любого расположения точек можно провести  $k$  прямых так, что они не проходят через отмеченные точки, и что любой отрезок, соединяющий синюю и красную отмеченные точки, пересекает по меньшей мере одну из проведенных прямых.
3. Неотрицательные числа  $x, y, z$  удовлетворяют условию  $xy + yz + zx = 3$ . Докажите, что

$$x(2 - y^2)(2 - z^2) + y(2 - z^2)(2 - x^2) + z(2 - x^2)(2 - y^2) \leq 3.$$

4. Точка  $D$  лежит на основании  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$ , а точки  $M$  и  $K$  — на его боковых сторонах  $AB$  и  $AC$  соответственно так, что  $AMDK$  — параллелограмм. Прямые  $MK$  и  $BC$  пересекаются в точке  $L$ . Перпендикуляр к  $BC$ , проходящий через  $D$ , пересекает прямые  $AB$  и  $AC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Докажите, что окружность с центром  $L$ , проходящая через  $D$ , касается описанной окружности треугольника  $AXY$ .
5. Натуральные числа  $x, y, z, t$  удовлетворяют соотношениям

$$xy - zt = x + y = z + t.$$

Могут ли числа  $xy$  и  $zt$  одновременно являться точными квадратами?