Тренировочная олимпиада

1. В классе учатся 20 человек. В один из вечеров оказалось, что любые два школьника либо один раз созвонились, либо один отправил одно SMS другому. Могло ли так оказаться, что в тот вечер каждый школьник сделал столько же звонков, сколько отправил SMS?

2. Пусть x, y, z — натуральные попарно взаимно простые числа. Известно, что $(x + y)(x + z)(y + z)$ делится на xyz. Чему могут быть равны x, y, z?

3. На основании AC равнобедренного тупоугольного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечена точка D. На стороне AB нашлась точка X такая, что $AD = DX$; а на продолжении CB за точку B — точка Y такая, что $YD = DC$. Точка Z симметрична точке B относительно отрезка AC. Докажите, что ZD, CX и AY пересекаются в одной точке.

4. У Юры есть много карточек, на каждой из которых написан либо плюс, либо минус, а у Кирилла есть 2021 карточка с числами от 1 до 2021. Они играют в следующую игру. Своим ходом Юра выкладывает карточку со знаком, а Кирилл рядом с ней выкладывает карточку с числом. Так они делают, пока у Кирилла не закончатся карточки.

В конце ребята находят сумму получившихся чисел. Кирилл хочет, чтобы модуль суммы был как можно больше. Какое наибольшее значение он может гарантированно получить?

5. Даны три положительных числа x, y, z, каждое из которых больше 1. Сумма этих чисел равна S. Известно, что

$$\frac{x^2}{x-1} > S; \quad \frac{y^2}{y-1} > S; \quad \frac{z^2}{z-1} > S.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} > 1.$$