Инверсия. Теория.

Инверсией *с центром в точке O и радиусом R называется отображение, которое каждой точке A плоскости сопоставляет такую точку $A^\star$ на луче OA, что*

$$OA \cdot OA^\star = R^2.$$

1. **Основная лемма.** Пусть при инверсии с центром O и радиусом R точки A и B переходят в точки $A^\star$ и $B^\star$ соответственно. Докажите, что треугольник OAB подобен треугольнику $OB^\star A^\star$.

2. Докажите, что при инверсии с центром O

   (a) прямая, проходящая через O, переходит сама в себя;

   (b) прямая, не проходящие через O, переходит в окружность, проходящую через O, и наоборот;

   (c) окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не проходящую через O.

3. Пусть при инверсии с центром O окружности ω_1 и ω_2 переходят друг в друга.

   (a) Докажите, что общие внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются в точке O. (Иными словами говоря, если окружности инверсны с некоторым центром, то они гомотетичны с тем же центром.)

   (b) Пусть общие внешние касательные касаются ω_2 в точках A и B. Докажите, что при инверсии центр ω_1 переходит в середину хорды AB.

4. Пусть при инверсии точка A переходит в точку $A^\star$. Докажите, что любая окружность, проходящая через точки A и $A^\star$, переходит при такой инверсии сама в себя.

5. Окружности ω_1 и ω_2 касаются окружности Ω внутренним образом в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения общих внешних касательных к ω_1 и ω_2 лежит на прямой PQ.

6. Две окружности пересекаются в точке A. К ним проведены две общие внешние касательные BC и DE. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и ADE касаются.

7. **Лемма Архимеда.** В сегмент окружности, отсекаемый хордой AB, вписана меньшая окружность. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, делит дугу AB исходной окружности пополам.

8. В угол вписаны две окружности. Третья окружность касается их обеих внешним образом (или обеих внутренним образом). Докажите, что прямая, проходящая через точки касания третьей окружности и первых двух, проходит через вершину угла.

9. Дана окружность S и две точки A и B на ней. Проводятся всевозможные пары окружностей S_1 и S_2, касающихся S в точках A и B и касающихся между собой. Найдите геометрическое место точек касания S_1 и S_2.