Тренировка VIII

1. Числа a и b таковы, что каждый из двух квадратных трехчленов x^2+ax+b и x^2+bx+a имеет по два различных корня, а произведение этих трехчленов имеет ровно три различных корня. Найдите все возможные суммы этих трех корней.

2. Пусть p — простое число, $p > 2$. Докажите, что любой простой делитель числа $2^p - 1$ имеет вид $2kp+1$.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точки P, Q, R и S — точки пересечения биссектрис углов A и B, B и C, C и D, D и A соответственно. Четырехугольник $PQRS$ вписан в окружность с центром T. Докажите, что диагонали четрырехугольника $ABCD$ и прямая OT пересекаются в одной точке.

4. В графе $2n-1$ вершин. Известно, что после удаления любой вершины найдется полный подграф с n вершинами. Докажите, что в исходном графе есть полный подграф с $n+1$ вершиной

5. Докажите, что при всех натуральных $n \geqslant 2$ выполнено неравенство
$$\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \ldots + \sqrt[n]{\frac{n}{n-1}} \leqslant n.$$

6. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих ее на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовем *расстоянием* между точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удаленными не более чем на n, увеличилось?