

## Клетчатая тренировка VIII

1. Из листа клетчатой бумаги размером  $29 \times 29$  клеточек вырезали 99 квадратиков  $2 \times 2$  (режут по линиям). Докажите, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.
2. Доску  $123 \times 123$  разбили на прямоугольники  $1 \times 3$ . Докажите, что число горизонтальных прямоугольников делится на 3.
3. Можно ли разбить клетчатую доску  $12 \times 12$  на уголки из трёх клеток так, что каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекало одно и то же количество уголков?
4. Доска  $8 \times 8$  красится в два цвета. Раскраска называется *ладейной*, если ладья может пройти от верхней стороны доски до нижней по белым клеткам, переходя каждым шагом с клетки на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что количество ладейных раскрасок меньше половины общего числа раскрасок.
5. Сколько существует способов раскрасить клетки доски  $10 \times 10$  в два цвета (чёрный и белый) так, чтобы в каждом квадрате  $2 \times 2$  было ровно 2 чёрных клетки?
6. В таблице  $10 \times 10$  расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке от 1 до 10 слева направо, во второй от 11 до 20 слева направо и т. д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники  $1 \times 2$ , посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадраты?
7. Рассмотрим все такие покраски клеток доски  $2018 \times 2018$  в  $k$  цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все  $k$  цветов встречаются. При каком наименьшем  $k$  в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?
8. В клетках таблицы  $15 \times 15$  изначально записаны нули. За один ход разрешается выбрать любой ее столбец или любую строку, стереть записанные там числа и записать туда все числа от 1 до 15 в произвольном порядке — по одному в каждую клетку. Какую максимальную сумму чисел в таблице можно получить такими ходами?