Турниры

Определение. *Турниром* называется полный ориентированный граф.

Определение. Путь или цикл называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа ровно один раз.

Определение. Ориентированный граф является *сильно связным*, если из любой его вершины можно по рёбрам добраться до любой другой

1. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.

2. В турнире в каждую вершину входит хотя бы одно ребро и из каждой хотя бы одно выходит. Докажите, что найдется цикл длины 3.

3. **(a)** Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.
   (b) Докажите, что в любом сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.
   (c) В турнире нет циклов. Докажите, что вершины можно занумеровать таким образом, что каждое ребро ведет из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером.

4. Докажите, что в произвольном турнире можно поменять направление не более одного ребра таким образом, чтобы он стал сильно связным.

5. 2^N волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). Докажите, что можно выделить такие $N+1$ команда $A_1, A_2, ...A_{N+1}$, что для любых $i<j$ команда A_i выиграла у команды A_j.

6. Даны $N \geqslant 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего номера к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовем однотонной, если нет двух таких точек A и B, что от A до B можно добраться и по красным стрелкам, и по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.

7. Назовем *царем* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух.
   (a) Докажите, что в любом турнире найдется царь.
   (b) Докажите, что если в турнире ровно один царь, то он победил всех других участников.
   (c) Докажите, что в турнире не может быть ровно двух царей.

8. Какое наибольшее количество циклов длины три может быть в турнирном графе на 11 вершин,
   (a) если исходящая степень каждой вершины равна 5;
   (b) турнир произвольный?