Неравенство Мюрхеда

Определение. *Пусть даны два упорядоченных по невозрастанию набора целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ с равными суммами. Говорят, что набор α* ***мажорирует*** *набор β (обозначение $\alpha \succ \beta$), если для любого k ($1 \leqslant k \leqslant n$)*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i.$$

(Поскольку суммы в наборах равны, то при $k = n$ в этом неравенстве должно достигаться равенство.)

Определение. *Пусть $\alpha \succ \beta$. Наборы α и β назовем* ***смежными****, если в наборе $(\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ ровно одна компонента равна 1, ровно одна компонента равна -1, а остальные компоненты равны 0.*

Определение. *Пусть дан набор целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Тогда* ***орбитой*** *одночлена $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_1}$ называется однородный симметрический многочлен*

$$T_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma_1}^{\alpha_1} \dots x_{\sigma_n}^{\alpha_n}.$$

Неравенство Мюрхеда. *Пусть $\alpha \succ \beta$. Тогда для любых положительных чисел $x_1, \dots, x_n$*

$$T_\alpha(x_1, \dots, x_n) \geqslant T_\beta(x_1, \dots, x_n).$$

1. Докажите неравенство Мюрхеда

(a) при условии, что наборы α и β смежны;

(b) в общем случае.

(c) В каких случаях в неравенстве Мюрхеда достигается равенство?

2. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}}.$$

3. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x + y)(x + z)(y + z) + xyz \leqslant 3(x^3 + y^3 + z^3).$$

4. Пусть сумма положительных чисел $t_1, \dots, t_n$ равна T. Докажите, что

$$\frac{t_1}{T - t_1} + \dots + \frac{t_n}{T - t_n} \geqslant \frac{n}{n - 1}.$$

5. Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c = ab+ac+bc$. Докажите, что $a+b+c+1 \geqslant 4abc$.

6. Пусть $x, y, z \in [0; 1]$. Докажите, что

$$3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - 2xyz(x + y + z) \leqslant 3.$$