Симметрические многочлены

Определение. *Многочлен от n переменных называется* ***симметрическим****, если он не меняется при любых перестановках переменных.*

Определение. *Каждому одночлену $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ симметрического многочлена $P(x_1,\dots,x_n)$ сопоставим набор $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и упорядочим эти наборы лексикографически. Одночлен, которому сопоставлен лексикографически наибольший набор, называется* ***старшим****.*

Определение. *Многочлен*

$$\sigma_k=\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n} x_{i_1}\dots x_{i_k}$$

называется ***элементарным симметрическим многочленом****.*

Основная теорема о симметрических многочленах. *Всякий симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.*

1. Представьте многочлен $x_1^3+\dots+x_n^3$ в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$.

2. **(a)** Докажите, что старший одночлен произведения двух многочленов равен произведению старших одночленов сомножителей.

(b) Докажите, что для всякого одночлена $M=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\dots\geqslant\alpha_n$, существует единственный набор неотрицательных целых числа $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ такой, что старший член многочлена $\sigma_1^{\beta_1}\dots\sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с M.

(c) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

3. Докажите, что произведение всех чисел $\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\dots\pm\sqrt{10}$ является

(a) целым числом;

(b) точным квадратом.

4. Многочлен называется *кососимметрическим*, если он меняет знак при перестановке любых двух переменных. Докажите, что всякий кососимметрический многочkен можно представить в виде произведения симметрического многочлена на *определитель Вандермонда*

$$V(x_1,\dots,x_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(x_i-x_j\right).$$

5. Положительные числа $a_1,\dots,a_n,q$ таковы, что $a_1+\dots+a_n=3q$, $a_1^2+\dots a_n^2=3q^2$ и $a_1^3+\dots+a_n^3>3q^3+q$. Докажите, что какие-либо два из чисел $a_1,\dots,a_n$ отличаются больше, чем на 1.

6. Каждые два из действительных чисел a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 отличаются не менее чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k$ и $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2$. Докажите, что $k^2\geqslant\frac{25}{3}$.