Отрезки касательных

1. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M, а продолжений сторон AB и AC в точках N и P соотвественно. Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны BC в точке K, а стороны AB в точке L. Докажите, что

(a) отрезок AN равен полупериметру треугольника ABC;

(b) $BK = CM$;

(c) $NL = BC$.

2. Лучи AB и DC четырехугольника пересекаются в точке P, лучи BC и AD — в точке Q. Докажите, что если в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то

(a) $AB + CD = AD + BC$;

(b) $PC + AQ = QC + AP$;

(c) $PD + DQ = PB + BQ$.

3. Через вершину A треугольника ABC провели прямую ℓ, не пересекающую внутренность треугольника. Построены две окружности, касающиеся прямой ℓ и продолжений стороны BC: одна из них, кроме этого, касается стороны AB, а вторая — AC. Докажите, что расстояние между точками касания окружностей с прямой ℓ фиксировано при фиксированном треугольнике ABC (т. е. не зависит от прямой ℓ).

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N . Докажите, что точки пересечения отрезка MN с BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD.

5. Даны непересекающиеся окружности S_1 и S_2 и их общие внешние касательные l_1 и l_2. На l_1 между точками касания отметили точку A, а на l_2 — точки B и C так, что AB и AC — касательные к S_1 и S_2. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2, а K — точка касания вневписаной окружности треугольника ABC со стороной BC. Докажите, что середина отрезка O_1O_2 равноудалена от точек A и K.

6. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Точка A_1 – точка касания вписанной окружности со стороной BC. Докажите, что точки O_1, O_2, D и A_1 лежат на одной окружности.

7. На каждой стороне четырехугольника $ABCD$ взято по две точки, и они соединены так, как показано на рисунке. Докажите, что если все пять черных четырехугольника являются описанными, т.е. в них можно вписать окружность, то четырехугольник $ABCD$ тоже описанный.