Тренировка VII

1. Какое наибольшее количество натуральных чисел можно отметить так, чтобы сумма и разность любых двух из них была взаимно проста с 2021?

2. На столе у чиновника лежат 2020 томов Британской Энциклопедии, сложенной в несколько стопок. Каждый день, придя на работу, чиновник берёт из каждой стопки по одному тому и складывает взятые тома в новую стопку, затем располагает стопки по количеству томов (в невозрастающем порядке) и заполняет ведомость, в которой указывает количество томов в каждой стопке. Кроме этого, чиновник никогда ничего не делает. Докажите, что начиная с некоторого дня, ведомость будет заполняться одинаковыми записями.

3. Натуральные числа $a_1, a_2, \dots a_n, k, M$ таковы, что
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = k$$
и $a_1 a_2 \dots a_n = M > 1$. Докажите, что многочлен
$$P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)$$
не имеет положительных корней.

4. Для положительных чисел x, y и z докажите неравенство:
$$\frac{x^3}{y^2+z^2} + \frac{y^3}{z^2+x^2} + \frac{z^3}{x^2+y^2} \geqslant \frac{x+y+z}{2}.$$

5. Дан граф, в котором степень каждой вершины не меньше 50 и не больше 100. Докажите, что вершины этого графа можно так покрасить в 1331 цвет, чтобы у каждой вершины были соседи хотя бы 20 различных цветов.

6. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Прямая B_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках M и N. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника IMN вдвое больше радиуса описанной окружности треугольника ABC.