

Тренировка VII

1. Найдите все такие натуральные x , для которых $x^2 + 4x - 1$ является точным квадратом.
2. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена медиана AA_1 . На стороне AB взята точка D так, что отрезок CD перпендикулярен AA_1 . Вычислите отношение $AD : DB$.
3. Многочлены P , Q и R с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству $P^2 + Q^2 = R^2$. Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени — действительные.
4. На тренинг по личностному росту пришло 30 человек. Оказалось, что любых пятих можно посадить за круглый стол с условием, чтобы рядом сидящие были знакомы. Какое минимальное количество пар знакомых может присутствовать на тренинге?
5. Пусть неотрицательные числа x_1, x_2, \dots, x_n таковы, что $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Докажите, что тогда

$$(1 + x_1)(2 + x_2) \dots (n + x_n) \leq 2 \cdot n!$$

6. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D . В треугольники ABD и BCD вписаны окружности. К ним проведена общая внешняя касательная (отличная от AC), пересекающая BD в точке K . Докажите, что длина отрезка BK не зависит от выбора точки D .
7. Петя и Вася играют в игру на решётке в виде сот. Петя закрашивает в чёрный цвет два соседних шестиугольника, а Вася перекрашивает любой закрашенный обратно. Какое максимальное количество закрашенных шестиугольников подряд может гарантировано получить Петя?