Тренировка VI

1. Существует ли такое 2020–значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2020 разных 2020–значных точных квадратов?

2. Для положительных вещественных чисел a, b, x, y, z докажите неравентсво

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geqslant\frac{3}{a+b}.$$

3. Точка M — середина стороны CD вписанного четырехугольника $ABCD$. Внутри этого четырехугольника отметили такую точку P, что $AP=BP=CM$. Прямые AB и CD пересекаются в точке X. Докажите, что $PX=MX$.

4. Шесть членов команды Нарнии на межнар отбираются из 13 кандидатов. На отборочной олимпиаде кандидаты набрали $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ баллов. Руководитель команды заранее выбрал шесть кандидатов и теперь хочет, чтобы в команду попали именно они. С этой целью он подбирает многочлен $P(x)$ и вычисляет творческий потенциал каждого кандидата по формуле $c_i=P(a_i)$. При каком минимальном n он заведомо сможет подобрать такой многочлен $P(x)$ степени не выше n, что творческий потенциал любого из его шести кандидатов окажется строго больше, чем у каждого из семи оставшихся?

5. В строку выписаны n нулей. За один шаг разрешается прибавить к одному из чисел единицу, если после этого все числа будут образовывать неубывающую (слева направо) последовательность. Обозначим через $Z(k,n)$ число способов получить за несколько таких ходов последовательность $\underbrace{k,k,\ldots,k}_{n}$. Докажите, что $Z(k,n)=Z(n,k)$ для любых натуральных n,k.

6. **Теорема Хватала.** Дан связный граф G, в котором не менее 3 вершин. Через $\alpha(G)$ обозначим максимальное количество вершин этого графа, попарно не смежных между собой (число независимости графа). Через $\varkappa(G)$ обозначим минимальное число вершин, после удаления которых граф теряет связность. Докажите, что если

$$\alpha(g)\leqslant\varkappa(G),$$

то в графе есть гамильтонов цикл.