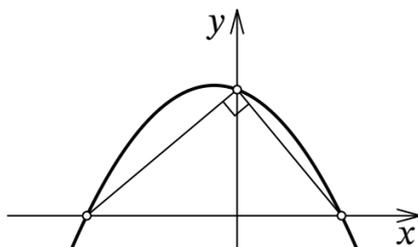


Тренировка VI

1. В каждую клетку таблицы 5×5 вписано число, не равное нулю. Сумма любых двух чисел, находящихся в соседних по стороне клетках, положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каким может быть знак произведения всех чисел? (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)
2. График квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + \frac{1}{6}$ пересекает оси координат в трёх точках, являющихся вершинами прямоугольного треугольника. Найдите a .



3. Восемь прожекторов стоят в ряд через равные промежутки и обращены к морю. С подходящего корабля можно определить только расположение прожекторов друг относительно друга, т.е. порядок и интервалы между горящими прожекторами, но нельзя понять, как прожекторы расположены относительно берега (например, если горит только один прожектор, то с корабля нельзя определить, какой именно). Сколько различных сигналов можно передать находящемуся в море кораблю? Хотя бы один прожектор должен гореть.
4. Докажите неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq \frac{9}{8}t(x + y + z).$$

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD , BE и CF , пересекающиеся в точке I . Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A , I , M и N лежат на одной окружности.
6. На футбольную секцию ходят 16 школьников. Каждую тренировку их разбивают на две команды по 8 человек, чтобы сыграть товарищеский матч. Через какое минимальное количество тренировок про любых двух школьников можно будет сказать, что они хотя бы раз играли в разных командах?
7. Степени всех вершин графа не меньше n , причем нет циклов длины 3, 4, 5. Докажите, что в нем существует $n^2 - n$ вершин, никакие две из которых не смежны.