

Диаграммы Юнга

Определение. *Диаграмма Юнга* — это некоторый набор клеток, выровненных по нижней границе, в котором длины столбцов образуют невозрастающую последовательность.

1. Петя написал количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ , Вася написал количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит $\ell - 1$, а Маша написала количество разбиений числа $n - \ell$ в сумму не более чем $k - 1$ слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ . Докажите, что сумма Машиного и Васиного чисел равно числу Пети.
2. Докажите, что количество разбиений числа N на не более чем m слагаемых равно числу разбиения числа $N + m$ ровно на m слагаемых.
3. У Димы есть кексы, разложенные в несколько коробок. Дима записал, сколько пирожных в каждой коробке. Лёня взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос — и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Лёня записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Димой равно количеству различных чисел среди записанных Лёней.
4. Сколько существует способов выбрать натуральное число и разбить его не более чем на k слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ ?
5. Крюком называется часть диаграммы Юнга, состоящая из какой-либо клетки и всех клеток, расположенных либо правее, либо выше ее. Дана диаграмма Юнга из n клеток. Пусть s — количество крюков, состоящих ровно из k клеток. Докажите, что
 - a) $ks \leq 2n$;
 - b) $s(k + s) \leq 2n$.
6. Докажите, что количество решений уравнения $1a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$, в которых первые несколько чисел (может быть, одно) a_i натуральны, а остальные равны нулю, совпадает с количеством решений уравнения $1a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$, в которых все числа a_i равны 0 или 1.
7. Докажите, что число способов разбить n в сумму различных слагаемых равно числу способов разбить n в сумму нечетных слагаемых.