

## Тренировка V

1. Дан угол с вершиной  $O$  и окружность, касающаяся его сторон в точках  $A$  и  $B$ . Из точки  $A$  параллельно  $OB$  проведен луч, пересекающий окружность в точке  $C$ . Прямая  $OC$  пересекает окружность в точке  $E$ . Прямые  $AE$  и  $OB$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что  $OK = KB$ .
2. Будем называть словом любую комбинацию из семи букв латинского алфавита. Сколько существует слов, в которых
  - (а) буквы различны и расположены в алфавитном порядке;
  - (б) буквы расположены в алфавитном порядке (при этом одна и та же буква может повторяться несколько раз подряд)?
3. Даны положительные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  такие, что  $ab + bc + ca = 1$ . Докажите, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2.$$

4. Про многочлен  $p(x)$  степени  $n$  известно, что  $|p(x)| \leq 1$ . Докажите, что  $p\left(-\frac{1}{n}\right) \leq 2^{n+1} - 1$ .
5. Найдите все натуральные  $n$ , для которых существуют такие натуральные числа  $x$ ,  $y$  и  $k$ , что  $(x, y) = 1$ ,  $k > 1$  и  $3^n = x^k + y^k$ .
6. Пусть  $G$  — связный граф, имеющий хотя бы три вершины. Определим  $G^3$  как граф на тех же вершинах, в котором соединены ребрами вершины, находящиеся в  $G$  на расстоянии не более трех. Докажите, что в графе  $G^3$  есть гамильтонов цикл.