Принцип Дирихле в ТЧ

Определение. Вычет a по модулю m называется *обратимым*, когда существует такой вычет b по модулю m что $a \cdot b \equiv 1 \mod m$

0. Докажите, что вычет a по модулю m обратим тогда и только тогда, когда $(a, m) = 1$.

1. **(a) Теорема Вильсона.** Докажите, что для натурального числа p сравнение

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p$$

выполнено тогда и только тогда, когда p простое или $p = 1$

(b) Докажите, что произведение всех обратимых вычетов по модулю n равно ± 1, и найдите все такие n при которых оно равно -1.

2. Докажите, что натуральные числа тогда и только тогда являются простыми числами-близнецами, когда $4((p-1)! + 1) + p$ делится на $p^2 + 2p$.

3. Докажите, что для любого натурального n существуют такие попарно взаимно простые натуральные числа $k_1, \dots, k_n$ большие единицы, такие, что число $k_1 k_2 \dots k_n - 1$ равно произведению двух последовательных натуральных чисел.

4. Бесконечную последовательность целых чисел $a_1, a_2, \dots$ определим соотношением $\sum\limits_{d|n} a_n = 2^n$. Докажите, что $n \mid a_n$.

5. Дано нечётное целое число $n > 1$, и целые числа $c_1, \dots, c_n$. Для каждой перестановки $a = (a_1, \dots, a_n)$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ определим $S(a) = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$. Докажите, что для каких-то двух различных перестановок a, b разность $S(a) - S(b)$ делится на $n!$.

6. Различные простые числа p, q и целое число a таковы, что $q \mid \dfrac{a^{p^3} - 1}{a^{p^2} - 1}$. Докажите, что $q \equiv 1 \mod p^3$

7. Нечётное простое число p и целое число x таковы, что $x \mid p^3 - 1$ и $x \nmid p - 1$. Докажите, что $p \mid (p-1)!\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots - \dfrac{x^{p-1}}{p-1}\right)$