

Асимптотика в комбинаторике

1. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали прямоугольник (со сторонами, параллельными линиям клеток).
2. Двое игроков отмечают точки плоскости. Сначала первый отмечает точку красным цветом, затем второй отмечает 100 точек синим, затем первый снова одну точку красным, второй 100 точек синим и так далее. (Перекрашивать уже отмеченные точки нельзя.) Докажите, что первый может построить правильный треугольник с красными вершинами.
3. Двое играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой бумаге по таким правилам: первый ставит два крестика, второй – нолик, первый – снова два крестика, второй – нолик и т. д. Первый выигрывает, когда несколько крестиков образуют квадрат $k \times k$. Докажите, что первый всегда может добиться победы. Если
 - (a) $k = 2$;
 - (b) $k = 2020$.
4. У Пети есть бесконечно много одинаковых треугольных салфеток. Докажите, что для достаточно больших R Петя сможет покрыть этими салфетками более 99% площади круглого стола радиуса R (салфетки не перекрываются, не вылезают за край стола, их можно переворачивать).
5. **Лемма Минковского.** Дана выпуклая центрально-симметричная фигура площади больше 4 с центром в целой точке. Докажите, что она содержит целую точку, отличную от центра.
6. Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли оставшиеся обойти конем (побывав на каждой по одному разу)?
7. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали квадрат (со сторонами, параллельными линиям клеток).