

Тренировка IV

1. Докажите, что при всех положительных значениях x

$$2^{\sqrt[3]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2^{1+\sqrt{x}}.$$

2. N участников группы 9–1 выстроились в ряд, причем каждый очень громко болтает со своими соседями. Сколькими способами Дмитрий Владимирович может составить команду из k человек так, чтобы ни одна из начатых дискуссий не могла быть продолжена?
3. Пусть a , b и c — различные корни многочлена $x^3 - 3x - 1$. Какие значения может принимать выражение $a^2b + b^2c + c^2a$?
4. Пусть сумма степеней двух несмежных вершин A и B графа G не меньше числа его вершин. И пусть в графе $G \cup \{AB\}$ есть гамильтонов цикл. Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.
5. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке Q . Одна невписанная окружность данного треугольника касается стороны AC в точке M , а также касается продолжения стороны AB в точке T . Другая невписанная окружность данного треугольника касается стороны AB в точке K , а также касается продолжения стороны BC в точке S . Отрезок TQ пересекает сторону AC в точке V . Отрезок VS пересекает сторону AB в точке Z . Докажите, что прямая MZ параллельна стороне BC .
6. На доске написаны n цифр в ряд. Докажите, что к ним можно приписать несколько цифр слева и не более n цифр справа так, чтобы получилась степень двойки.