Тренировка IV

1. N участников группы 9–2 выстроились в ряд, причем каждый очень громко болтает со своими соседями. Сколькими способами Леонид Андреевич может составить команду из k человек так, чтобы ни одна из начатых дискуссий не могла быть продолжена?

2. Через точку $(3; 9)$ графика функции $y = x^2$ проходят две перпендикулярные прямые: ℓ_1 и ℓ_2. Прямая ℓ_1 пересекает ось Ox в точке $(a; 0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(b; b^2)$. Прямая ℓ_2 пересекает ось Ox в точке $(c; 0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(d; d^2)$. Чему равняется $\frac{ac}{bd}$?

3. Решите в натуральных числах уравнение $x^{100} - y^{100} = 100!$

4. На полке стоят $n > 1$ книг, каждые две из которых имеют разную толщину и высоту. Книги расставлены в порядке возрастания высоты. Вася может поменять местами любые две стоящие рядом книги, если левая из них толще и ниже, чем правая. Докажите, что вне зависимости от порядка Васиных действий через конечное число шагов Вася будет вынужден прекратить свою деятельность, и книги будут стоять в порядке возрастания толщины.

5. В треугольнике ABC $\angle CAB = 2\angle ABC$. Внутри треугольника ABC нашлась точка D такая, что $AD = BD$ и $CD = AC$. Докажите, что $\angle ACB = 3\angle DCB$.

6. Докажите, что для некоторого натурального m ни один член последовательности (a_n), заданной условиями $a_1 = m$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ при всех $n \geqslant 1$, не делится ни на один из предыдущих 2020 членов.

7. В сильно связном ориентированном графе нет циклов чётной длины. Докажите, что при любой раскраске вершин в два цвета найдётся ребро с одноцветными концами.

8. Дан ромб $ABCD$. Пусть L — основание биссектрисы угла A треугольника ABC. Оказалось, что $LC = LD$. Найдите углы ромба.