Тренировка III

1. Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных вещественных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

2. Докажите, что для положительных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 1$, выполнено неравенство
$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

3. На окружности отмечены $2n$ точек так, что никакие три хорды с концами в этих точках не пересекаются в одной точке, лежащей внутри окружности. Разобьем отмеченные точки на n пар, и в каждой паре соединим точки отрезком. Число точек пересечения проведенных n отрезков назовем характеристикой разбиения. Найдите среднее арифметическое характеристик по всем разбиениям.

4. В однокруговом турнире участвуют $2n > 4$ команд. К текущему моменту уже сыгран $n - 1$ тур. Докажите, что можно сыграть ещё как минимум два тура.

5. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Через вершины треугольника проведены три параллельные прямые. Точки P, Q, R — их точки пересечения с серединными перпендикулярами к отрезкам AH, BH, CH соответственно. Докажите, что точки P, Q, R лежат на одной прямой.

6. Дано простое число p и многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ с целыми коэффициентами, степень которого не превосходит n. Рассмотрим все наборы $(r_1, \ldots, r_n)$ таке, что $0 \leqslant r_i \leqslant p - 1$ (при $1 \leqslant i \leqslant n$) и что $p | f(r_1, \ldots, r_n)$. Докажите, что число рассмотренных наборов делится на p.