# Тренировка III. Неравенства.

**Неравенства о средних.**

Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется неравенство:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все числа равны.

**Неравенство КБШ (Коши-Буняковского-Шварца).**

Для вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполняется неравенство:

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы чисел $a_i$ и $b_i$ пропорциональны или один из наборов нулевой.

**Транснеравенство.**

Даны два набора чисел $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ и $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$, и перестановка $\sigma$ чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда выполняется неравенство

$$x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1 \leqslant x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \cdots + x_ny_{\sigma(n)} \leqslant x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

**1.** Докажите, что для положительных чисел $a, b, c, d$ выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{d}}+\sqrt{\frac{c+d}{a}}+\sqrt{\frac{d+a}{b}} \geqslant 4\sqrt{2}$$

**2.** **(Дробное КБШ или неравенство Седракяна.)** Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите неравенство:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}.$$

**3.** Положительные $x$, $y$, $z$ таковы, что $x+y+z = xyz$. Найдите минимум $xy+yz+zx$.

**4.** Сумма трёх положительных чисел равна 6. Докажите, что сумма их квадратов не меньше 12.

**5.** Числа $a$, $b$ и $c$ удовлетворяют условию $a+b+c \neq 0$. Докажите, что:

$$\frac{1}{a^2+b^2+4c^2}+\frac{1}{a^2+4b^2+c^2}+\frac{1}{4a^2+b^2+c^2} \leqslant \frac{9}{2(a+b+c)^2}$$

**6.** Для положительных чисел $a, b, c, d$ докажите неравенство:

$$\frac{a+b+c+d}{abcd} \leqslant \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}\ .$$

**7.** Докажите, что для положительных чисел $a, b, c$ таких, что $a + b + c = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

**8.** Положительные числа $a$ и $b$ удовлетворяют условию $ab \geqslant 1$. Докажите, что

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geqslant 16.$$