Тренировка III. Неравенства.

1. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{d}}+\sqrt{\frac{c+d}{a}}+\sqrt{\frac{d+a}{b}} \geqslant 4\sqrt{2}$$

Решение.

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{d}}+\sqrt{\frac{c+d}{a}}+\sqrt{\frac{d+a}{b}} \geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\frac{2\sqrt{ab}}{c}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{bc}}{d}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{cd}}{a}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{da}}{b}} \geqslant 4\sqrt{2}$$

2. **(Дробное КБШ или неравенство Седракяна.)** Для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ докажите неравенство:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\dots+\frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{b_1+b_2+\dots+b_n}.$$

Решение. Применим КБШ к наборам $(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \dots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}})$ и $(\sqrt{b_1}, \dots, \sqrt{b_n})$, а затем разделим на $b_1+\dots+b_n$

3. Положительные x, y, z таковы, что $x+y+z=xyz$. Найдите минимум $xy+yz+zx$.

Решение. Применим КБШ к наборам $(\sqrt{\frac{1}{xy}}, \sqrt{\frac{1}{yz}}, \sqrt{\frac{1}{zx}})$ и $(\sqrt{xy}, \sqrt{yz}, \sqrt{zx})$

$$(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx})(xy+yz+zx) \geqslant 9$$

4. Сумма трёх положительных чисел равна 6. Докажите, что сумма их квадратов не меньше 12.

Решение. По неравенству между средним арифметическим и средним кфадратическим имеем

$$2=\frac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

5. Числа a, b и c удовлетворяют условию $a+b+c \neq 0$. Докажите, что:

$$\frac{1}{a^2+b^2+4c^2}+\frac{1}{a^2+4b^2+c^2}+\frac{1}{4a^2+b^2+c^2} \leqslant \frac{9}{2(a+b+c)^2}$$

Решение. По неравенству Седракяна

$$\frac{a^2}{2a^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{4a^2+b^2+c^2}$$

$$\frac{b^2}{2b^2}+\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{b^2+a^2}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{a^2+4b^2+c^2}$$
$$\frac{c^2}{2c^2}+\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+4c^2}$$

6. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство:

$$\frac{a+b+c+d}{abcd}\leqslant\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\ .$$

Решение. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geqslant\frac{3}{abc}$$

7. Докажите, что для положительных чисел a, b, c таких, что $a+b+c=1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geqslant\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

Решение. По неравенству Седракяна

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}\geqslant\frac{4}{2-a-b}=\frac{4}{1+c}$$

8. Положительные числа a и b удовлетворяют условию $ab\geqslant 1$. Докажите, что

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right)\geqslant 16.$$

Решение. Применим КБШ к наборам $(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{b},\sqrt{\frac{2}{a+1}})$ и $(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{a},\sqrt{\frac{2}{b+1}})$.

$$(a+2b+\frac{2}{a+1})(b+2a+\frac{2}{b+1})\geqslant(a+b+\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}})^2$$

$$a+b\geqslant\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2}$$

Докажем, что

$$\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}\geqslant\frac{2}{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$\sqrt{ab}(a+2\sqrt{ab}+b)\geqslant ab+a+b+1$$

$$a+b+\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}+\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4}+\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\geqslant$$

$$\geqslant 4\sqrt[4]{\sqrt[4]{ab}\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}{8}}\geqslant 4$$