

Асимптотика

1. На клетчатой плоскости расположены два забора, один вертикальный и один горизонтальный, каждый из которых представляет из себя луч, проходящий по линиям сетки. Докажите, что нельзя обойти всю доску ходом хромой ладьи. (Ходы, пересекающие заборы, запрещены.)
2. Вася написал на доске числа от 1 до 10^{12} . Сперва он сосчитал количество выписанных чисел, представимых в виде суммы точного куба и точной шестой степени. Затем он подсчитал количество выписанных точных квадратов. Какой из результатов оказался больше?
3. Докажите, что существует натуральное число N такое, что уравнение

$$w^3 + x^3 + y^3 + z^3 = N$$

имеет не менее 2020 решений в натуральных числах.

4. Существует ли многочлен, значения которого во всех целых числах являются степенями двойки?
5. Петя и Вася по очереди закрашивают клетки бесконечной клетчатой доски. За один ход Петя закрашивает 100 клеток в зеленый цвет, а Вася — 99 клеток в красный цвет. Перекрашивать клетки нельзя. Петя хочет нарисовать полностью зеленый квадрат 10×10 . Сможет ли Вася ему помешать?
6. Пусть $\sigma(n)$ — сумма цифр числа n . Докажите, что найдется бесконечно много n таких, что
 - (a) $\sigma(3^{n+1}) \leq \sigma(3^n)$;
 - (b) $\sigma(2^{n+1}) \leq \sigma(2^n)$.
7. Из клетчатой плоскости вырезали все клетки, у которых обе координаты делятся на 1000. Докажите, что оставшуюся часть доски нельзя обойти ходом коня.
8. Верно ли, что из любого натурального числа можно получить точный квадрат, добавляя к его десятичной записи не более 10^6 цифр? (Цифры можно вписывать в любые места.)