Асимптотика. Рост функций. Бернулли.

0. Докажите, что существует натуральное число N такое, что уравнение

$$w^3 + x^3 + y^3 + z^3 = N$$

имеет не менее 2020 решений в натуральных числах.

1. Вася написал на доске числа от 1 до 10^{12}. Сперва он сосчитал количество выписанных чисел, представимых в виде суммы точного куба и точной шестой степени. Затем он подсчитал количество выписанных точных квадратов. Какой из результатов оказался больше?

2. Докажите, что существует натуральное число, которое можно двумя способами представить в виде суммы трёх **различных** чисел: одно из которых является точным квадратом, другое — точной третьей степенью, а третье — точной пятой степенью.

3. **(a)** **Неравенство Бернулли**. Докажите, что если $x \geqslant -1$, то

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

для всех $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Докажите, что если $x \geqslant 0$, то

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx(1 - x) + \frac{n^2x^2}{2}$$

для всех $n \in \mathbb{N}_0$.

4. **Число Армстронга** — натуральное число, которое в данной системе счисления равно сумме своих цифр, возведённых в степень, равную количеству его цифр. Докажите, что десятичной системе исчисления чисел Армстронга конечно.

5. Существует ли квадратный трехчлен, все значения которого в натуральных точках — кубы натуральных чисел?

6. Существует ли многочлен с вещественными коэффициентами, значения которого во всех натуральных числах — степени двойки?

7. В этой задаче все углы измеряются в радианах.

(a) Докажите, что если $x < \dfrac{\pi}{2}$, то $\sin x > x$ и $\cos x > 1 - x$.

(b) На окружности с центром в точке O отмечены точки A и B. Известно, что $\angle AOB < \dfrac{\pi}{2}$. Олег отмечает на дуге AB точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ именно в таком порядке. Далее строится следующая последовательность точек:

- X_1 — проекция A на отрезок OA_1;

- X_2 — проекция X_1 на отрезок OA_2;
- X_3 — проекция X_2 на отрезок OA_3;
- ...
- X_n — проекция X_{n-1} на отрезок OB.

Докажите, что Олег может так выбрать n и расположение точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, что $OX_n > 0{,}99 \cdot OA$.