Тренировка II

1. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а точка O — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Прямая, проходящая через I параллельно AC, пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Прямые PO и QO пересекают сторону AC в точках M и N. Докажите, что $AC = 2MN$.

2. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите, что

$$\frac{1-9a^3}{9a^3}+\frac{1-9b^3}{9b^3}+\frac{1-9c^3}{9c^3} \geqslant \frac{a+b}{c}+\frac{c+b}{a}+\frac{c+a}{b}.$$

3. Существует ли такое конечное множество M ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M, все корни которого действительны и также принадлежат M?

4. В городе живут юноши и девушки, некоторые из которых знакомы между собой. Множество юношей назовем покрывающим, если каждая девушка знает по меньшей мере одного юношу в данном множестве. Также множество девушек назовем покрывающим, если каждый юноша знает по меньшей мере одну девушку в данном множестве. Докажите, что число покрывающих множеств девушек и число покрывающих множеств юношей имеют одинаковую четность.

5. На поединок собрались $2n$ дуэлянтов. Некоторые пары дуэлянтов ненавидят друг друга, и это чувство всегда взаимно. Оказалось, что если какие-то два дуэлянта не ненавидят друг друга, то каждый из остальных ненавидит хотя бы одного из них, а кто-то ещё и обязательно ненавидит их обоих. Докажите, что всех дуэлянтов можно разбить на пары для дуэли так, чтобы каждая пара противников ненавидела друг друга.

6. Решите в натуральных числах уравнение $(n-1)!+1=n^k$.