# Тренировка II

**1.** Положительные числа $a, b, c$ таковы, что $abc = 1$. Найдите минимальное значение выражения $(2+a)(2+b)(2+c)$.

**2.** У коллекционера есть 100 монет. Он знает, что некоторые из них настоящие, а некоторые фальшивые (возможно, все монеты настоящие или все монеты фальшивые). Можно показать любые две монеты эксперту и тот скажет, одного ли они типа (при этом не скажет, где какая). Коллекционер хочет разделить монеты на две группы так, чтобы в каждой группе были монеты только одного типа. За какое минимальное количество обращений к эксперту, он может это сделать?

**3.** Рассмотрим все остатки взаимно простые с $m$. Множество таких остатков называют приведённой системой вычетов по модулю $m$ и обозначают $\mathbb{Z}_m^*$. Количество чисел, взаимно простых с $m$ и не больших $m$, обозначается $\varphi(m)$. Функция $\varphi(m)$ называется *функцией Эйлера*.

Выведите формулу $\varphi(m)$, если разложение $m$ на простые множители выглядит следующим образом

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}.$$

**4.** На сторонах $AB$ и $AD$ квадрата $ABCD$ выбраны точки $N$ и $P$ соответственно, а на отрезке $AN$ выбрана точка $Q$ так, что $NP = NC$ и $\angle QPN = \angle NCB$. Докажите, что $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle AQP$.

**5.** Для положительных чисел докажите неравенство

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

**6.** Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что для некоторых целых $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$

$$P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = P(x_5) = 5.$$

Докажите, что у $P(x)$ нет целых корней.

**7.** В треугольник $ABC$ вписана полуокружность, диаметр которой принадлежит стороне $BC$. Стороны $AB$ и $AC$ касаются полуокружности соответственно в точках $C_1$ и $B_1$. Докажите, что прямые $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются на высоте $AA_1$ треугольника $ABC$.

**8.** Юра написал невидимыми чернилами в клетках таблицы $5\times5$ различные числа. За один ход Кирилл может показать на несколько клеток, а Юра скажет, какой набор чисел в них написан (но не скажет, в какой клетке какое число написано). За какое минимальное количество ходов Кирилл может определить, в какой клетке какое число написано?