Интерполяция

1. Пусть заданы различные вещественные числа $x_0, x_1, \dots, x_n$, вещественные числа $y_0, y_1, \dots, y_n$, а также многочлен $P(x)$, степень которого не превосходит n. И пусть для любого $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ справедливо $P(x_i) = y_i$.
Докажите **интерполяционную формулу Лагранжа**

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}.$$

2. Парабола $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f(0) \in [0, 1], f(\pm 2) \in [3, 4], f(3) \in [9, 10].$$

Найдите $f(x)$.

3. Пусть $P(x)$ ненулевой многочлен, который удовлетворяет условию

$$(x - 1)P(x + 1) = (x + 2)P(x)$$

для любого x, и $(P(2))^2 = P(3)$. Найти $P(x)$.

4. Вася задумал многочлен десятой степени. Петя может назвать десять вещественных чисел и Вася сообщит ему значение многочлена при одном из названных значений переменной. При этом Вася не сообщает, какое именно число из названных Петей он подставил.
(a) Может ли Петя определить Васин многочлен за несколько вопросов?
(b) Если да, то какое наименьшее число вопросов ему для этого потребуется?

5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не выше n, для которого $P(i) = 2^i$ при $i = 0, 1, \dots, n$. Найдите $P(n + 1)$.

6. Дана последовательность Фибоначчи $F_0 = 0, F_1 = 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Многочлен $P(x)$ степени 1009 таков, что $P(k) = F_k$ при всех $k \in \{1011, \dots, 2020\}$. Найдите $P(2021)$.

7. Дано натуральное число $n > 3$. Назовём набор из n точек на координатной плоскости допустимым, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ разделяет допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из n точек можно разделить многочленом степени не более k?

8. Даны вещественные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$. Докажите, что значение выражения

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \prod_{j \neq i} \frac{1 - x_i x_j}{x_i - x_j}$$

равно остатку от деления n на 2.