Интерполяция

Вспоминаем материал с летних сборов

1. **(a)** Докажите, что многочлен степени n имеет не более n различных корней.
(b) Докажите, что если два многочлена степени не выше n совпадают в $n+1$ точке, то они равны.

2. Решите уравнение

$$c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x.$$

3. Леша выписал на доске 100 различных чисел. Затем он увеличил все числа на один. Оказалось, что произведение чисел не изменилось. Затем он повторил операцию, и произведение чисел снова не изменилось. Какое наибольшее количество раз он мог повторить эту операцию, чтобы произведение чисел оставалось постоянным?

Новые задачи

Определение. Построение такого многочлена $P(x)$ степени не выше n, что $P(x_i)=y_i$, где $0\leqslant i\leqslant n$, называется интерполяцией.

1. Докажите **интерполяционную формулу Лагранжа**

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{x-x_0}{x_i-x_0}\cdots\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\cdot\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdots\frac{x-x_n}{x_i-x_n}.$$

2. Известно, что некоторый многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.

3. Докажите, что если многочлен $f(x)$ степени n принимает целые значения в точках $x=0,1,\ldots,n$, то он принимает целые значения во всех целых точках, при
(a) $n=3$; **(b)** любом натуральном n.

4. Квадратный трёхчлен $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f(0)\in[0,1], f(\pm2)\in[3,4], f(3)\in[9,10].$$

Найдите $f(x)$.

5. Вася задумал многочлен десятой степени. Петя может назвать десять вещественных чисел и Вася сообщит ему значение многочлена при одном из названных значений переменной. При этом Вася не сообщает, какое именно число из названных Петей он подставил.
(a) Может ли Петя определить Васин многочлен за несколько вопросов?
(b) Если да, то какое наименьшее число вопросов ему для этого потребуется?

Интерполяция. Добавка.

6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не выше n, для которого $P(i) = 2^i$ при $i = 0, 1, \dots, n$. Найдите $P(n + 1)$.

7. Дано натуральное число $n > 3$. Назовём набор из n точек на координатной плоскости допустимым, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ разделяет допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из n точек можно разделить многочленом степени не более k?