

Тренировка I

Успех не случайность. Это тяжелая работа, настойчивость, обучение, изучение, жертвоприношение и, прежде всего, любовь к тому, что вы делаете или учитесь делать.

Пеле

1. Есть таблица 15×100 (15 столбцов, 100 строк). В каждой строке в каких-то двух клетках стоит по фишке. Каждая следующая строка отличается от предыдущей положением ровно одной фишки: та сдвигается либо вправо, либо влево на одну клетку. Докажите, что есть две строки, в которых фишки стоят на одинаковых позициях.
2. У генерала в подчинении находятся n солдат, пронумерованные от 1 до n . В день D происходит следующее:
 - первые k солдат предают генерала ($0 \leq k \leq [n/2]$);
 - среди оставшихся солдат, генерал выбирает k человек, чтобы сразиться с предателями.

Сколько существует различных «сценариев», как может пройти день D ?

3. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет четыре положительных корня с учетом кратности. Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.
4. В треугольник ABC вписана полуокружность, диаметр которой принадлежит стороне BC . Стороны AB и AC касаются полуокружности соответственно в точках C_1 и B_1 . Докажите, что прямые BB_1 и CC_1 пересекаются на высоте AA_1 треугольника ABC .
5. Известно, что $2003^q + 1 \vdots (p^2 + 1)$ и $2003^p + 1 \vdots (q^2 + 1)$. Найдите все пары простых p и q , для которых это верно.
6. (а) Для обороны архипелага из 300 островов герцог хочет соединить некоторые острова мостами. Известно, что противник сможет подорвать либо один мост, либо два моста, которые не ведут к одному и тому же острову. Какое наименьшее количество мостов должен построить герцог, чтобы после действий противника можно было от любого острова добраться по мостам до любого другого? (Каждый мост соединяет два острова; два острова могут быть соединены не более чем одним мостом; мосты могут проходить друг над другом).
- (б) Не успел герцог начать строительство, как ему донесли, что у противника появилась ещё одна возможность: подорвать три моста, никакие два из которых не

ведут к одному острову. Какое наименьшее количество мостов нужно построить теперь?