

Тренировка I

Успех не случайность. Это тяжелая работа, настойчивость, обучение, изучение, жертвоприношение и, прежде всего, любовь к тому, что вы делаете или учитесь делать.

Пеле

1. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычестить из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки (можно вычитать $1 = 2^0$). Выигрывает тот, кто получит ноль.
2. Решите уравнение $x^8 + y^8 + z^8 + 5 = 8xyz$.
3. Есть таблица 15×100 (15 столбцов, 100 строк). В каждой строке в каких-то двух клетках стоит по фишке. Каждая следующая строка отличается от предыдущей положением ровно одной фишки: та сдвигается либо вправо, либо влево на одну клетку. Докажите, что есть две строки, в которых фишки стоят на одинаковых позициях.
4. Докажите, что для любого простого p число $2^{2^p} - 4$ делится на $2^p - 1$.
5. Дан прямоугольник $ABNK$, M — середина стороны AB . На луче KM выбрана точка C так, что $\angle KAC = 135^\circ$. Прямая CB пересекает сторону KN в точке L . Докажите, что $KL = BN$.
6. Шестеро маляров участвовали в покраске 35 домов. Известно, что каждый красил ровно 10 домов, а любые два вместе участвовали в покраске ровно 5 домов. Докажите, что найдутся три маляра, которые вместе участвовали в покраске хотя бы 3 домов.
7. У генерала в подчинении находятся n солдат, пронумерованные от 1 до n . В день D происходит следующее:
 - первые k солдат предают генерала ($0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$);
 - среди оставшихся солдат, генерал выбирает k человек, чтобы сразиться с предателями.Сколько существует различных «сценариев», как может пройти день D ?
8. Великан-сладкоежка ест четыре торта: 28,8 кг, 20 кг, 16,2 кг и 12,8 кг. Каждый торт он ест с постоянной скоростью, а на все четыре торта ушло 13 минут. Если бы великан ел каждый торт только по 1 минуте, то всего он съел бы всего 23,4 кг сладкого. С какой скоростью он ел второй торт?