

Двудольные графы

Граф — *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет рёбер с концами одинакового цвета.

1. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?
2. Пусть G — двудольный граф с чёрными и белыми вершинами. Докажите, что
 - (a) Все циклы в графе G имеют чётную длину.
 - (b) Если в G есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета — поровну.
 - (c) Если в G есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа чёрных вершин не более, чем на 1.
 - (d) Пусть в графе все циклы имеют чётную длину. Докажите, что он двудольный.
3. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?
4. Дано 1000 натуральных чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, что отношение любых двух одноцветных чисел не является простым числом.
5. В графе 100 вершин, нет треугольников, степень каждой вершины больше 40. Доказать, что в этом графе нет циклов длины 5.
6. (a) Докажите, что следующий граф — двудольный:
Вершины графа — расстановка пары фишек на шахматной доске. Две расстановки связаны ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.
(b) На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Так ходили, пока не прошли через все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.
7. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

Двудольные графы. Добавка.

8. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?
9. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что у Васи есть способ поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.
10. Рассмотрим все такие покраски клеток доски 2020×2020 в k цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?